Решите неравенство $log_{17-x^2}\left(\frac{21}{5}x - x^2\right) \le 1.$

(Математика. Подготовка к ЕГЭ, под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова)

Решение.

Будем искать решения неравенства на множестве:

$$\begin{cases} \frac{21}{5}x - x^2 > 0, \\ 17 - x^2 \neq 1 \\ 17 - x^2 > 0. \end{cases} => x \in (0;4) \cup (4;\sqrt{17})\ (*)$$

Применим метод рационализации

$log_{f(x)}g(x) \le 1 <=> (f(x)-1)\big(g(x)-f(x)\big) \le 0$ и получим

$$(17 - x^2 - 1)\left(\frac{21}{5}x - x^2 - 17 + x^2\right) \le 0$$

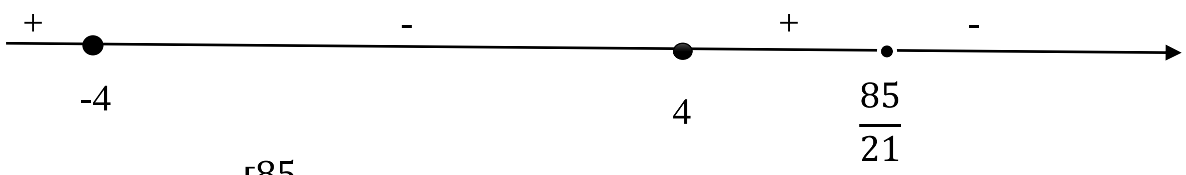
$$(16 - x^2)\left(\frac{21}{5}x - 17\right) \le 0$$

$$(4 - x)(4 + x)\left(\frac{21}{5}x - 17\right) \le 0$$

Решим неравенство методом интервалов.

$x = 4 \qquad x = -4 \qquad x = \frac{85}{21}$

Отметим эти точки на числовой прямой (точки будут «темные», «закрашенные», так как знак неравенства нестрогий: меньше или равно нулю), определим знаки на каждом интервале и запишем промежутки со знаком «–».



$x \in [-4;4] \cup \left[\frac{85}{21};+\infty\right)$

С учетом условия (*), получаем

$x \in (0;4) \cup \left[\frac{85}{21};\sqrt{17}\right)$ $\qquad \frac{85}{21} < \sqrt{17}$, т.к. $\left(\frac{85}{21}\right)^2 < \left(\sqrt{17}\right)^2$

Ответ: $x \in (0;4) \cup \left[\frac{85}{21};\sqrt{17}\right)$